

## Prova 1

Tempo a disposizione: 4 ore.

Il candidato prenda in considerazione i seguenti problemi:

1) Soluzione di un *sistema di equazioni lineari*:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice invertibile e  $\mathbb{R}^n$ ;

2) Soluzione del *sistema di equazioni non lineari*:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

dove  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  è una funzione differenziabile con continuità;

3) Soluzione del *problema di Cauchy*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

con  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  una funzione differenziabile con continuità;

4) Calcolo dell'integrale

$$\int_0^1 f(x) dx,$$

dove  $f \in C^1([0, 1])$ .

Per ciascun problema, il candidato discuta le principali tecniche di risoluzione numerica, confrontandole tra loro, mettendone in evidenza vantaggi e limitazioni, indicando, per ciascuno metodo, i casi in cui non applicabilità.

## Prova 2

Tempo a disposizione: 4 ore.

Il candidato risolva i seguenti problemi:

### Problema 1

Ai banchi del check-in di una compagnia aerea i viaggiatori arrivano con tempi di arrivo distribuiti esponenzialmente con valor medio pari a 1 minuto. I tempi di servizio degli operatori sono anch'essi distribuiti esponenzialmente, con valor medio pari a 2 minuti e 30 secondi.

I viaggiatori appartengono a due classi: business e economy. Si assuma che con probabilità indipendente ogni viaggiatore sia di business class con probabilità  $1/4$  e di economy class con probabilità  $3/4$ .

I viaggiatori di business class hanno un loro banco riservato, in cui vengono serviti con disciplina FIFO, e i viaggiatori di economy dispongono di due banchi, che lavorano sempre con disciplina FIFO un'unica coda.

Si assuma l'intero sistema in condizioni stazionarie.

- 1) Si determini la distribuzione di probabilità del numero di arrivi al minuto.
- 2) Quali sono i modelli adatti a descrivere i tre banchi? Con quali parametri?
- 3) Qual'è il valore aspettato del tempo passato in coda per i clienti di business class? E per i clienti di economy class?
- 4) Qual'è la probabilità che non ci sia alcun cliente, ne' di business ne' di economy, ad attendere in coda?

### Problema 2

Una barra di acciaio (modulo di Young  $E = 200\text{GPa}$ , densità  $\rho = 8 \cdot 10^3\text{kg/m}^3$ ) ha sezione circolare di diametro 1cm e lunghezza  $L = 1\text{m}$ . La barra è incastrata alle due estremità. Si assuma che, al generico tempo  $t$ , i punti materiali appartenenti alla tipica sezione  $z \in [0, L]$  subiscano uno spostamento  $u(z, t)$  lungo l'asse della barra. Si determinino le frequenze di vibrazione della barra.

### Problema 3

Adoperando il *metodo del simplesso* minimizzare la quantità  $-2x+y$  nel rispetto dei seguenti vincoli:

$$x + 2y \leq 6, \quad 3x + 2y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Una volta determinata la soluzione, verificarne la correttezza per via grafica.

## Prova 3

Tempo a disposizione: 8 ore.

Dati  $n$  punti in un quadrato di lato unitario, esiste un percorso poligonale che li unisce che rende minima la somma delle potenze  $m$ -sime delle lunghezze dei suoi lati (definiamo tale somma come la lunghezza del percorso).

Progettare un algoritmo euristico che produca, in tempi ragionevoli, una soluzione approssimata del problema per  $m=1$  e per  $m=2$ .

In entrambi i casi dare una stima superiore della lunghezza del percorso ottenibile dall'algoritmo in funzione di  $n$ .